3.已知 $x\,,\,y\,,z$ 是正數且滿足 $\begin{cases} 2x+2y+xy=14 \\ 2x+2z+xz=28 \\ 2y+2z+yz=32 \end{cases}$ ，試求 $x+y+z+xyz$ 之值

解：

1^0： $2x+2y+xy=14$

$\Rightarrow 2x+2y+xy+4=18$

$\Rightarrow (x+2)(y+2)=18$ .....(1)

2^0 $2x+2z+xz=28$

$\Rightarrow (x+2)(z+2)=32$ .....(2)

3^0 $2y+2z+yz=32$

$\Rightarrow (y+2)(z+2)=36$ ......(3)

(1)(2)(3)相乘可得 $(x+2)(y+2)(z+2)=144$ 分別代回(1)(2)(3)

$\Rightarrow x+2=4\,,\,y+2=\dfrac{9}{2}\,,\,z+2=8$

$\Rightarrow x=2\,,\,y=\dfrac{5}{2}\,,\,z=6$

$x+y+z+xyz=\dfrac{81}{2}$

6.已知 $f^{n}(x)=\overbrace{f(f(\ldots f(x))}^{n次}$

設 $f(x)=2x+1$ ，回答以下二個問題

(1)將 $f^{n}(x)$ 表示成 x 的一次多項函數

(2)求出所有正整數 m 使得 $f^{112}(m)$ 被 21 整除

解：

(1)

$f^{n}(x)=2f^{n-1}(x)+1$

$\Rightarrow f^{n}(x)+1=2(f^{n-1}(x)+1)$ 以下 n 逐項代入

$f^{2}(x)+1=2(f(x)+1)$,n=2

$f^{3}(x)+1=2(f^{2}(x)+1)$,n=3

$f^{4}(x)+1=2(f^{3}(x)+1)$,n=4

....

$f^{n}(x)+1=2(f^{n-1}(x)+1)$

相乘$\Rightarrow$ $f^{n}(x)+1=2^{n-1}(f(x)+1)$

$=2^{n-1}(2x+1+1)$

$f^{n}(x)=2^{n}(x+1)-1$

(2)

$f^{112}(m)=2^{112}(m+1)-1$是 21=$3\times7$的倍數

$2^{112}(m+1)-1\equiv0(\bmod 21)$

$2^{112}(m+1)\equiv1(\bmod 21)$

$\Rightarrow 2^{112}(m+1)\equiv1(\bmod 3)$ 　且 $2^{112}(m+1)\equiv1(\bmod 7)$

(i) $2^{112}(m+1)\equiv1(\bmod 3)$

又 $2^{112}\equiv1(\bmod 3)$

$\Rightarrow m+1\equiv1(\bmod 3)$

(ii) $2^{112}(m+1)\equiv1(\bmod 7)$

又 $2^{112}\equiv2(\bmod 7)$

$\Rightarrow m+1\equiv4(\bmod 7)$

由 (i)(ii)得 $m+1=3\times7x+3y+1$ 　($m+1$被 3 除餘 1)

又($m+1$)被 7 除餘 4,所以取 $y=1$

$\Rightarrow m+1=21x+4$

$\therefore m=21x+3, x$是非負整數