馬公高中 **112** 學年數學競試參考答案

1.

$$\sqrt{1+2x\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{x^2+(1-x^2)+2x\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{(x+\sqrt{1-x^2})^2}=\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|$$

同理$\sqrt{1-2x\sqrt{1-x^2}}=\left|x-\sqrt{1-x^2}\right|$

若$x>\sqrt{1-x^2}$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1$，則原式$=x+\sqrt{1-x^2}+x-\sqrt{1-x^2}=2x$

若$x\le\sqrt{1-x^2}$，即$0<x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，則原式$=x+\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x^2}-x=2\sqrt{1-x^2}$

2.

$$(\log y)^2+(2^{x+1}+2^{-x+1})\log y+(2^{2x+1}+2^{-2x+1})=0$$

$$\Rightarrow(\log y)^2+2(2^x+2^{-x})\log y+(2^x+2^{-x})^2+(2^{2x}+2^{-2x}-2)=0$$

$$\Rightarrow\left[\log y+(2^x+2^{-x})\right]^2+(2^x-2^{-x})^2=0$$

所以$\begin{cases}\log y+(2^x+2^{-x})=0\\ 2^x-2^{-x}=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ \log y=-2\Rightarrow y=\frac{1}{100}\end{cases}$$

3.

令$\cos\alpha=\sqrt{1-p^2}$，$\sin\alpha=p$，其中$\frac{-\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{1-p^2}\sin x+p\cos x=\sin(x+\alpha)$$

由題意可知$\frac{-\pi}{2}\le\frac{-\pi}{4}+\alpha$且$\frac{\pi}{3}+\alpha\le\frac{\pi}{2}$

因此$\frac{-\pi}{4}\le\alpha\le\frac{\pi}{6}\Rightarrow\sin\frac{-\pi}{4}\le\sin\alpha\le\sin\frac{\pi}{6}$

故$\frac{-\sqrt{2}}{2}\le p\le\frac{1}{2}$。

4.

因$\theta=\tan^{-1}\dfrac{5}{12}\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{12}{13}$且$a=(\dfrac{12}{13})^{\frac{1}{2004}}+(\dfrac{12}{13})^{\frac{-1}{2004}}$，

則$a^2=(\dfrac{12}{13})^{\frac{2}{2004}}+2+(\dfrac{12}{13})^{\frac{-2}{2004}}$且

$$a^2-4=(\frac{12}{13})^{\frac{2}{2004}}-2+(\frac{12}{13})^{\frac{-2}{2004}}=\left[(\frac{12}{13})^{\frac{1}{2004}}-(\frac{12}{13})^{\frac{-1}{2004}}\right]^2$$

$$\Rightarrow\sqrt{a^2-4}=(\frac{12}{13})^{\frac{-1}{2004}}-(\frac{12}{13})^{\frac{1}{2004}}$$

因此$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)^{2004}=\left(\left(\dfrac{12}{13}\right)^{\frac{-1}{2004}}\right)^{2004}=\dfrac{13}{12}$

5.

$$f(100)-f(99)=100^2$$
$$f(99)-f(98)=99^2$$
$$\vdots$$
$$f(11)-f(10)=11^2$$
$$\Rightarrow f(100)-f(10)=11^2+12^2+\cdots 100^2$$
$$\Rightarrow f(100)=(1^2+2^2+\cdots 100^2)-(1^2+2^2+\cdots 10^2)+f(10)$$
$$=\frac{100\times 101\times 201}{6}-\frac{10\times 11\times 21}{6}+10=337975$$
，故$f(100)$除以100之餘式為75。

6.

$$a_{n+1}=a_n-a_{n-1}+\frac{{a_n}^2}{a_{n-2}}$$
$$\Rightarrow a_{n-2}(a_{n+1}+a_{n-1})=a_n(a_n+a_{n-2})$$
$$\Rightarrow\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-2}}$$
$$\Rightarrow\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$$

令$b_n=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$得$b_3=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=2$

又$b_{n+1}=b_n\cdot\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

$$\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_{n-2}}$$
$$\Rightarrow\frac{b_{n+1}}{a_{n-1}}=\frac{b_n}{a_{n-2}}=\frac{b_{n-1}}{a_{n-3}}=\cdots=\frac{b_3}{a_1}=2$$
$$\Rightarrow b_n=2a_{n-2}\Rightarrow\frac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=2a_{n-2}$$
$$\Rightarrow a_n=2a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-2}(n\geq 3)$$

7. 設 $f(x)=ax^2+bx+c$ ，若 $0<f(1)<3$ ， $1<f(2)<4$ ， $2<f(3)<5$ ，試求 $f(4)$ 的範圍。

SOL：設 $f(4)=mf(1)+nf(2)+pf(3)$

由 $$\begin{aligned}&16a+4b+c=m(a+b+c)+n(4a+2b+c)+p(9a+3b+c)\\&=(m+4n+9p)a+(m+2n+3p)b+(m+n+p)c\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m+4n+9p=16\\m+2n+3p=4\\m+n+p=1\end{cases}\Rightarrow m=1,n=-3,p=3$$ ，

由 $f(4)=f(1)-3f(2)+3f(3)$ 及 $$\begin{aligned}0<f(1)<3\\-12<-3f(2)<-3\\6<3f(3)<15\end{aligned}$$ 得 $-6<f(4)<15$

8. 設 x 、 y 、 z 為正實數，且 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ ，(1)試求 x□y□z 之值。(2)試證明：滿足 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$ 的解只有 $(x,y,z)=(t,t,t)$ ，$t\in R^{+}$ 。

ANS：(1)任意正實數　(2)略。

SOL：

$\because x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}\therefore x-y=\frac{y-z}{yz}\therefore yz(x-y)=y-z$ ，同理 $zx(y-z)=z-x$ ， $xy(z-x)=x-y$

$\Rightarrow x^2y^2z^2(x-y)(y-z)(z-x)=(y-z)(z-x)(x-y)$

(1) $x=y=z$ ， $xyz=x^3\in R^{+}$

(2) $x\neq y$ ， $y\neq z$ ， $z\neq x$ ：　$x^2y^2z^2=1\Rightarrow xyz=\pm1$ (取正)

欲求出 x 、 y 、 z ：

令 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$ ， $\Rightarrow x=k-\frac{1}{y},y=k-\frac{1}{z},z=k-\frac{1}{x}$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{y}=x+\frac{1}{k-\frac{1}{z}}=x+\frac{1}{\frac{kz-1}{z}}=x+\frac{z}{kz-1}=x+\frac{k-\frac{1}{x}}{k(k-\frac{1}{x})-1}$$

$$=x+\frac{\frac{kx-1}{x}}{k^2-\frac{k}{x}-1}=x+\frac{\frac{kx-1}{x}}{\frac{k^2x-k-x}{x}}=x+\frac{kx-1}{k^2x-k-x}=\frac{k^2x^2-x^2-kx+kx-1}{k^2x-x-k}=\frac{k^2x^2-x^2-1}{k^2x-x-k}=k$$

$\Rightarrow (k^2-1)x^2-1=k(k^2-1)x-k^2\quad\Rightarrow (k^2-1)x^2-k(k^2-1)x+(k^2-1)=0$

$\Rightarrow (k^2-1)(x^2-kx+1)=0$

同理 $y+\frac{1}{z}=y+\frac{1}{k-\frac{1}{x}}=y+\frac{1}{\frac{kx-1}{x}}=y+\frac{(k-\frac{1}{y})}{k(k-\frac{1}{y})-1}=\frac{k^2y^2-y^2-1}{k^2y-y-k}=k$

$\Rightarrow (k^2-1)(y^2-ky+1)=0$ ， $(k^2-1)(z^2-kz+1)=0$

討論：(I)　$k=1$：(i) $0<x<1$　$\Rightarrow\frac{1}{x}>1\Rightarrow x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=1$ 不合。($\because z>0\therefore z+\frac{1}{x}>1$)

(ii) $x>1$　$\Rightarrow x+\frac{1}{y}=1$ 不合($\because y>0\therefore x+\frac{1}{y}>1$)

(iii) $x=1$　由 $x+\frac{1}{y}=1\Rightarrow\frac{1}{y}=0\Rightarrow y$ 無解

此時 x、y、z 均無解。

(II)　$k\neq1,k>0$： $x^2-kx+1=0\Rightarrow x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$ ， $y^2-ky+1=0\Rightarrow y=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$ ，

$z^2-kz+1=0\Rightarrow z=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

得 x 、 y 、 z 至少有兩個相同(矛盾不合)，此時 x、y、z 亦無解。

故 $x\neq y$ ， $y\neq z$ ， $z\neq x$ 時，由 $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}=k$ ，得 x、y、z 無解。

由(1)(2)：得 x、y、z 的解為 $x=y=z=t\in R^{+}$ 。