1. 由 $f(-1)=a-b+c$ ， $f(1)=a+b+c$ ， $f(0)=c$ ，

可解得：

$a=\frac{1}{2}(f(1)+f(-1))-f(0)$ ，$b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))$ ， $c=f(0)$ ，

因此：

$$f(x)=f(1)\cdot\frac{x^2+x}{2}+f(-1)\cdot\frac{x^2-x}{2}+f(0)\cdot(1-x^2)$$

① 當 $-1\le x\le 0$ 時：

$$|f(x)|\le|f(1)|\cdot\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+|f(-1)|\cdot\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+|f(0)|\cdot|1-x^2|$$

$$\le\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+|1-x^2|$$

$$=\frac{x^2+x}{2}+\frac{x^2-x}{2}+(1-x^2)$$

$$=x^2-x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\le\frac{5}{4}$$

② 當 $0\le x\le 1$ 時：

$$|f(x)|\le|f(1)|\cdot\left|\frac{x^2+x}{2}\right|+|f(-1)|\cdot\left|\frac{x^2-x}{2}\right|+|f(0)|\cdot|1-x^2|$$

$$=\frac{x^2+x}{2}+\frac{x^2-x}{2}+(1-x^2)$$

$$=x^2-x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\le\frac{5}{4}$$

2. 點數和 = 20，每顆至少一點：20 - 6 = 14

由排容原理:

n(14 點任意分給 6 顆) - n(有 1 顆超過 6 點) + n(有 2 顆超過 6 點)：

$$=\frac{19!}{14!\times 5!}-C_1^6\times\frac{13!}{8!\times 5!}+C_2^6\times\frac{7!}{2!\times 5!}$$

= 11628 - 7922 + 315

= 4221

所求 $=\frac{4221}{6^6}=\frac{469}{5184}$

3. (1) $\tan A+\tan B+\tan C=-\tan\left(B+C\right)+\tan B+\tan C=\dfrac{\tan B+\tan C}{\tan B\tan C-1}+\tan B+\tan C$ ……①

(2) $\tan B+\tan C=\dfrac{\sin B}{\cos B}+\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sin\left(B+C\right)}{\cos B\cos C}=\dfrac{\sin A}{\cos B\cos C}$ ……②

(3) $b^2+c^2=4bc\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow a^2+2bc\cos A=4bc\left(\sin A\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos A\cdot\dfrac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow a^2+2bc\cos A=2\sqrt{3}bc\sin A+2bc\cos A$

$\Rightarrow a^2=2\sqrt{3}bc\sin A$

$\Rightarrow\left(2R\sin A\right)^2=2\sqrt{3}\left(2R\sin B\right)\left(2R\sin C\right)\sin A\Rightarrow\sin A=2\sqrt{3}\sin B\sin C$ ……③

(4) 將③式代入②式，得

$\tan B+\tan C=\dfrac{2\sqrt{3}\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=2\sqrt{3}\tan B\tan C$ ……④

(5) 將④式代入①式，得

$\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{2\sqrt{3}\tan B\tan C}{\tan B\tan C-1}+2\sqrt{3}\tan B\tan C$

令 $p=\tan B\tan C-1$，則 $p>0$

$\tan A+\tan B+\tan C=\dfrac{2\sqrt{3}\left(p+1\right)}{p}+2\sqrt{3}\left(p+1\right)$

$=2\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{p}+2\sqrt{3}p+2\sqrt{3}$

$=4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\left(p+\dfrac{1}{p}\right)$

$\geq 4\sqrt{3}+2\sqrt{3}\times 2$

$=8\sqrt{3}$

故 $\tan A+\tan B+\tan C$ 的最小值為 $8\sqrt{3}$。

4. 設n為任意正整數，試證明$C_0^{2n}+3C_2^{2n}+3^2C_4^{2n}+\cdots+3^nC_{2n}^{2n}$為$2^n$的倍數。

Pf：已知$\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}=C_0^{2n}+\sqrt{3}C_1^{2n}+3C_2^{2n}+3\sqrt{3}C_3^{2n}+3^2C_4^{2n}+\cdots+3^nC_{2n}^{2n}$

$$\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}=C_0^{2n}-\sqrt{3}C_1^{2n}+3C_2^{2n}-3\sqrt{3}C_3^{2n}+3^2C_4^{2n}-\cdots+3^nC_{2n}^{2n}$$

上下兩式相加再除以 2，可得題目式子：

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}}{2}=C_0^{2n}+3C_2^{2n}+3^2C_4^{2n}+\cdots+3^nC_{2n}^{2n}$$

再整理一下：

$$\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2n}+\left(1-\sqrt{3}\right)^{2n}}{2}=\frac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{n}+\left(4-2\sqrt{3}\right)^{n}}{2}=2^n\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}}{2}$$

$$=2^{n-1}【\left(2+\sqrt{3}\right)^{n}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{n}】$$

$$=2^{n-1}【\left(2^nC_0^n+2^{n-1}\sqrt{3}C_1^n+2^{n-2}C_2^n+\cdots\right)+\left(2^nC_0^n-2^{n-1}\sqrt{3}C_1^n+2^{n-2}C_2^n-\cdots\right)】$$

$=2^{n-1}\times 2\times(2^nC_0^n+2^{n-2}C_2^n+2^{n-4}C_4^n\ldots)$為$2^n$倍，證明結束。

5. 設稜長=1，則底面正五邊形的對角線長度=$2\sin 54°$，利用側面兩個相鄰三角形的中線及底面的對角線可形成三角形，在使用餘弦定理可得$\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$