114 學年度　馬公高中　數學競試測驗

班級　　姓名　　　　　座號

得分欄

題號	分數	題號	分數	題號	分數	題號	分數	題號	分數	總分
1-2		**3-4**		**5**		**6**		**7-8**		

(給分:每題按寫出分析過程步驟正確性分步計分,若只寫出答案沒有過程不予計分。) 得分：

1.設n是正整數，若$n^2+3n+15$為兩相鄰正奇數的乘積，求n 。　　(配分 6 分)

解: $n^2+3n+15=(2k-1)(2k+1)=4k^2-1, k\in N$

$\Rightarrow n^2+3n-4k^2+16=0$　　n**有整數解**

$\therefore \Delta=9-4(-4k^2+16)=16k^2-55$ **是完全平方數**

$\Rightarrow 16k^2-55=m^2, m\in N$

$\Rightarrow (4k+m)(4k-m)=55$

$\Rightarrow \begin{cases}4k+m=55\\4k-m=1\end{cases} \therefore k=7$代回

$\Rightarrow n^2+3n+15=195$

$\Rightarrow n^2+3n-180=0 \Rightarrow (n+15)(n-12)=0 \therefore n=12$

2.正整數a,b,c成等差數列且$a<b<c$，令r,s是相異兩實數且滿足$\begin{cases} ar^2+br+c=s \\ as^2+bs+c=r \end{cases}$試回答以下問題

(可直接寫(2)或(3)小題，每小題分開計分)　　(1)證明$r+s=-\dfrac{b+1}{a}$　　(配分 3 分)

(2)承(1)證明 $rs=\dfrac{c}{a}+\dfrac{b+1}{a^2}$　　(配分 5 分)

(3)承(2)，若$rs=115$，求a　　(配分 6 分)

解:(1)兩式相減⇒

$[a(r+s)+b+1](r-s)=0$，因$r\neq s$

$\Rightarrow a(r+s)+b+1=0\Rightarrow r+s=-\dfrac{b+1}{a}$

(2)

$r+s=-\dfrac{b+1}{a}$

$\Rightarrow s=-\dfrac{b+1}{a}-r$ 代回聯立①

$\Rightarrow ar^2+(b+1)r+c+\dfrac{b+1}{a}=0$ 可視r為$ax^2+(b+1)x+c+\dfrac{b+1}{a}=0$的根

又$r+s=-\dfrac{b+1}{a}$

$\Rightarrow r=-\dfrac{b+1}{a}-s$ 代回聯立②

$\Rightarrow as^2+(b+1)s+c+\dfrac{b+1}{a}=0$ 可視s為$ax^2+(b+1)x+c+\dfrac{b+1}{a}=0$的根

$\therefore\ ax^2+(b+1)x+c+\dfrac{b+1}{a}=0$有根$r$和$s$

$\Rightarrow rs=\dfrac{c}{a}+\dfrac{b+1}{a^2}$

(3) $\dfrac{c}{a}+\dfrac{b+1}{a^2}=115$

$\Rightarrow \dfrac{ac+b+1}{a^2}=115\Rightarrow \dfrac{a^2+(2a+1)k+a+1}{a^2}=115$　**,設k是公差(亦是整數)**

$\Rightarrow a^2+(2a+1)k+a+1=115a^2\Rightarrow (2a+1)k=114a^2-a-1$

$\Rightarrow k=\dfrac{114a^2-a-1}{2a+1}=57a-29+\dfrac{28}{2a+1}$

$\therefore (2a+1)|28$　又$2a+1$是奇數$\Rightarrow 2a+1=7$　故$a=3$

3.$\log a = x + y$，其中 x 為整數，$0 \le y < 1$，滿足$x(x-6) = 16y$，試求 a 值(配分 10 分)

解: (1). 利用 y 的範圍建立 x 的不等式

已知 $0 \le y < 1$，且題目給定關係式 $x(x-6) = 16y$，我們可以將其變形為：

$$y = \frac{x(x-6)}{16}$$

將其代入 y 的範圍限制中，可得關於整數 x 的不等式：

$$0 \le \frac{x(x-6)}{16} < 1$$

$$0 \le x(x-6) < 16$$

(2). 求解整數 x 的可能值

我們將上述不等式拆解為兩個部分來求解：

1. 左半部分 $x(x-6) \ge 0$：解得 $x \ge 6$ 或 $x \le 0$。
2. 右半部分 $x(x-6) < 16$：解得 $-2 < x < 8$。

綜合以上兩個範圍，可得 x 的區間為：$-2 < x \le 0 \quad or \quad 6 \le x < 8$

因為 x 必須為整數，所以 x 的可能值為：$x = -1, 0, 6, 7$

(3) 計算對應的 y 與 $\log a$ 值

將各個 x 的可能值代回 $y = \frac{x(x-6)}{16}$，並利用 $\log a = x + y$ 計算出 $\log a$：

- 當 $x = -1$ 時：$y = \frac{-1 \times (-7)}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow \log a = -1 + \frac{7}{16} = -\frac{9}{16} \Rightarrow a = 10^{-\frac{9}{16}}$
- 當 $x = 0$ 時：$y = \frac{0 \times (-6)}{16} = 0 \Rightarrow \log a = 0 + 0 = 0 \Rightarrow a = 1$
- 當 $x = 6$ 時：$y = \frac{6 \times 0}{16} = 0 \Rightarrow \log a = 6 + 0 = 6 \Rightarrow a = 10^{6}$
- 當 $x = 7$ 時：$y = \frac{7 \times 1}{16} = \frac{7}{16} \Rightarrow \log a = 7 + \frac{7}{16} = \frac{119}{16} \Rightarrow a = 10^{\frac{119}{16}}$

4.設 a、 b 為正實數，且滿足下列兩個方程：$a^b = b^a$，$b = 9a$，試求a與b的值。(配分 10 分)

簡答:

$a^{9a} = (9a)^a = 9^a \times a^a$

$a^{8a} = 9^a$

$a^{8a} = 9$

$a = 3^{\frac{1}{4}}$

$b = 3^{\frac{9}{4}}$

5.在 ΔABC 中，(1)證明 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$。(配分 10 分)

(2)設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，且 D, E, F 分別為頂點 A, B, C 在對邊上的垂足。已知 ΔABC 的面積為 S，其垂足三角形 ΔDEF 的面積為 S_H。 證明：$\dfrac{S}{S_H}=\dfrac{1}{2\cos A\cos B\cos C}$ (配分 10 分)

解:(1)證明： $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

在 ΔABC 中，$A+B+C=180^{\circ}$，則 $A+B=180^{\circ}-C$。

兩邊取正切值：$\tan(A+B)=\tan(180^{\circ}-C)=-\tan C$。

展開和角公式可得

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

交叉相乘可得 $\tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$

移項得證 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(2)證明： $\dfrac{S}{S_H}=\dfrac{1}{2\cos A\cos B\cos C}$

在銳角 ΔABC 中，由於 $\angle AFC=\angle AEB=90^{\circ}$，四點 $\boldsymbol{B, C, E, F}$ 共圓，或觀察 $\Delta AFE\sim\Delta ABC$。

相似比為 $\dfrac{AF}{AB}=\cos A$。

因此 ΔAFE 的面積 $S_{AFE}=S\cdot\cos^2 A$。

同理，$S_{BFD}=S\cdot\cos^2 B$，$S_{CED}=S\cdot\cos^2 C$。

垂足三角形面積 S_H：

$$S_H=S-(S_{AFE}+S_{BFD}+S_{CED})=S(1-\cos^2 A-\cos^2 B-\cos^2 C)$$

在三角形中，根據餘弦的和角公式：

$$\cos C=-\cos(A+B)=-\cos A\cos B+\sin A\sin C$$

移項可得：$\cos C+\cos A\cos B=\sin A\sin B$

將兩邊同時平方，利用 $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$ 可得 $(\cos C+\cos A\cos B)^2 = \sin^2 A\sin^2 B$

$(\cos C+\cos A\cos B)^2 = (1-\cos^2 A)(1-\cos^2 B)$

展開兩邊可得 $\cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C + \cos^2 A\cos^2 B = 1-\cos^2 A - \cos^2 B + \cos^2 A\cos^2 B$

觀察等號兩邊，消去相同的項 $\cos^2 A\cos^2 B$ 可得 $\cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1-\cos^2 A-\cos^2 B$

最後，將 $-\cos^2 A$ 與 $-\cos^2 B$ 移項至左側可得 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C = 1-2\cos A\cos B\cos C$

$S_H = S[1-(1-2\cos A\cos B\cos C)] = 2S\cos A\cos B\cos C$

整理得 $\dfrac{S}{S_H} = \dfrac{1}{2\cos A\cos B\cos C}$

6.計算下列各小題的正確計數(每小題 4 分)

(1).將 5 個不同的球放進 7 個相同的箱子裡,有多少種不同的放法?

將球數依個數分堆

一堆:5 ➔ 方法數:1

二堆:4+1 ➔ 方法數:$C_1^5=5$

3+2 ➔ 方法數:$C_2^5=10$

三堆:3+1+1 ➔ 方法數:$C_3^5=10$

2+2+1 ➔ 方法數:$\dfrac{C_2^5C_2^3}{2!}=15$

四堆:2+1+1+1➔ 方法數: $C_2^5=10$

五堆:1+1+1+1+1 ➔ 方法數:1

共計 52

(2).將 5 個相同的球放進 7 個不同的箱子裡,有多少種不同的放法?

7 個不同箱子裝的球數分別設為 $x_1, x_2,.....x_7$

$x_1+x_2+.....+x_7=5$

可推出 $C_5^{11}=462$

(3).將 5 個不同的球放進 7 個不同的箱子裡,每箱最多放 1 個,共有多少種不同的放法?

$P_5^7=2520$

(4).將 7 個不同的球放進 5 個不同的箱子裡,每箱至少放 1 個,共有多少種不同的放法?

承(5) 放入不同箱子 5 個

$140\times5!=16800$

(5).將 7 個不同的球放進 5 個相同的箱子裡,每箱至少放 1 個,共有多少種不同的放法?

將球數依個數先分 5 堆

3+1+1+1+1 ➔方法數為 $C_3^7=35$

2+2+1+1+1➔方法數為 $\dfrac{C_2^7C_2^5}{2!}=105$ 共計 $35+105=140$

7.設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且其領導次數 $\deg(f(x)) \geq 4$。 已知 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^2$ 的餘式為 $12x-5$，且 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $3x+2$。 試求 $f(x)$ 除以 $(2x-1)^2(x-1)^2$ 的餘式。

(配分 10 分)

Sol:

1.根據 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘式為 $3x+2$，我們可以將 $f(x)$ 表示為：

$$f(x) = Q(x)(x-1)^2 + 3x + 2$$

由於題目給予了兩組二次方的除式條件，我們假設 $R(x)$ 具有 $(ax+b)(x-1)^2 + 3x + 2$ 的形式。

2. 利用除以 $(2x-1)^2$ 的條件手寫稿中採用了將 $(ax+b)(x^2-2x+1)+3x+2$ 展開並與除式 $(2x-1)^2 = 4x^2-4x+1$ 進行長除法的對比。展開式為：$ax^3+(b-2a)x^2+(a-2b+3)x+(b+2)$。將此式除以 $4x^2-4x+1$，手寫稿中計算出係數關係，得到：$c = -4d = -8$（註：此處 c, d 對應手寫稿中假設的係數項）。

3. 代入係數求解根據手寫稿下方的計算步驟：

$$\begin{aligned}(-4x-8)(x-1)^2+3x+2 &= -4(x+2)(x^2-2x+1)+3x+2 = -4(x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2)+3x+2 \\ &= -4(x^3-3x+2)+3x+2\end{aligned}$$

4. 最後化簡將括號展開並合併同類項：

$$-4x^3+12x-8+3x+2 = -4x^3+15x-6$$

答：$-4x^3+15x-6$

8.設 a,b 為實數，已知下面關於 x 的實數值不等式，在實數體中的解集合恰為區間 $[-3,1)$ ，說明與分析該不等式並求出數對 (a,b) 的值。 (配分 10 分)

$$\frac{x-a}{x-4}\sqrt{\frac{1}{b-x}} \leq 0$$

Sol

1. 找出 b：根號要大於 0 且分母不為 0，所以定義域為 $b-x>0 \Rightarrow x<b$。因為解集合的右端點是開區間 1)，這個界限只能由定義域提供，因此唯一鎖定 $b=1$。

2. 找出 a：現在 x 被限制在 $x<1$ 的世界裡。此時，根式 $\sqrt{\frac{1}{1-x}}$ 恆為正數。為了讓整體 ≤ 0，前面的分式必須 ≤ 0：

$$\frac{x-a}{x-4} \leq 0$$

因為已知 $x<1$，所以分母 $(x-4)$ 絕對是負數。分母為負，分子就必須為正（或 0），所以 $x-a \geq 0 \Rightarrow \mathbf{x} \geq \mathbf{a}$。

3. 兩者取交集：條件 $x \geq a$ 與定義域 $x<1$ 取交集，得到的解集合就是 $[a,1)$。題目說這個解集合恰好是 $[-3,1)$。